第 1 回
東大入試形式模試問題＜前期＞

数学（理科）

（配点 120 点）

1. 試験開始の合図はありません。
2. この問題 PDF は 2 ページあります。
3. 解答用紙の大きさは、東大入試本番に準じます。すなわち、第 3, 6 問については第 1, 2, 4, 5 問の 2 倍の大きさの解答用紙があります。
4. この模試は東大入試「形式」模試なので、難易度が実際の東大入試レベルである保証はありません。

$\boxed{1}$ 実数 a, b, c, d, e, f は $a^2+b^2=1, c^2+d^2=2, e^2+f^2=3, ac+bd=1, ae+bf=\dfrac{3}{2}$ を満たす。このとき、$ce+df$ のとりうる値をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ A 君と B 君がそれぞれトークンを a, b 個持って、勝負を行う。勝負は「A 君が $p(0<p<1)$, B 君が $1-p$ の確率で勝利するゲームを行い、負けたほうが勝った方に 1 個トークンを渡す。相手の持つトークンの数を 0 にしたほうが勝ちである」というものである。最終的に A 君が勝つ確率を求めよ。

$\boxed{3}$ 正整数 n に対して、$F_n(x)=\displaystyle\int_1^x (\log t)^n dt\ (x>0)$ とおく。

(1) $F_1(x)$ を求めよ。また、$n \geq 1$ のとき、$F_{n+1}(x)$ を $F_n(x)$ を用いて表せ。

(2) どのような x に対しても、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F_n(x)}{n!}=0$ であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(\log x)^k x}{k!}=1$ を示せ。　(4) $e^x=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ を示せ。

$\boxed{4}$ a, b を $0<a<b$ なる実数とする。$\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ で表される図形上に 4 点 A, B, C, D をとったところ、四角形 ABCD は長方形になった。このとき、長方形 ABCD の各辺は x 軸もしくは y 軸に平行であることを示せ。

$\boxed{5}$ この問において、行列は 2 行 2 列のものに限るとする。$X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対して、$\mathrm{tr}X=x+w, \det X=xw-yz$ と定める。また、$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。行列 A, B に対し $A^2=B$ が成り立ち、さらに $B=kE$ となる実数 k が存在しないとき、次の問いに答えよ。

(1) 行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ について、$(\det X)^2=\det(X^2)$ を示せ。さらに、$\det X \neq 0$ のとき、$X+(\det X)X^{-1}=(\mathrm{tr}X)E$ を示せ。

(2) $(\mathrm{tr}A)^2$ を、$\mathrm{tr}B, \det A$ を用いて表せ。また、A を、$B, \det A, \mathrm{tr}A$ を用いて表せ。

(3) B を固定したとき、各成分が実数であるような異なる A がちょうど 2 個存在する B の条件を、$\det B, \mathrm{tr}B$ を用いて書け。

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を、$a_1=2, b_1=1, a_{n+1}=2a_nb_n, b_{n+1}={b_n}^2-{a_n}^2$ として定める。

(1) 任意の正整数 n に対し、$a_n \neq 0, b_n \neq 0$ かつ $|a_n|, |b_n|$ は互いに素であることを示せ。

(2) 任意の正整数 n, m (但し $n<m$ とする) に対し、$\dfrac{a_n}{b_n} \neq \dfrac{a_m}{b_m}$ を示せ。

(3) x を $\tan x=2$ かつ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ となる実数として定める。$\dfrac{x}{\pi}$ は無理数であることを示せ。