命題

$x>0$ を無理数、a,b を $0<a<1, 0<b<1$ なる実数として、

$$S_k = \{nx | n \in \mathbb{Z}, 0<n\le k, a < nx - \lfloor nx \rfloor < b\}$$

と定める。このとき、$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{S_k}{k} = b-a$ が成り立つ。

証明

先ず、2 つの補題を示し、これらを用いて命題を示す。

補題 I

$x>0$ を無理数とする。任意の実数 ϵ に対し、ある正整数 k, 非負整数 n が存在し、$0<kx-n<\epsilon$ が成り立つ。

補題 I の証明

$F(x) = \left(\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+1\right)x-1$ として定める。ここで、床関数の定義から $\frac{1}{x}-1<\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ なので、$0<F(x)$ を得る。また、$\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \le \frac{1}{x}$ であるが、等号成立時 $\frac{1}{x}$ は整数になり、x が無理数であることに矛盾するので、$\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor < \frac{1}{x}$ が成り立ち、$F(x)<x$ を得る。

$\epsilon>x$ のときは、$n=0,k=1$ とすることにより与式は明らかに成立する。(a)

ある n,k に対して $0<kF(x)-n<\epsilon$ が成り立つ時、$kF(x)-n = k\left(\left(\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+1\right)x-1\right)-n$ であることより、適切な n',k' を定めることにより $0<k'x-n'<\epsilon$ を成立させることができる。(a) より、x に対して F を繰り返し適用することで任意の正の ϵ よりも値を小さくできることを示せば良い。

背理法によりこれを示す。正整数 t に対して $F_0(x)=x, F_t(x)=F(F_{t-1}(x))$ と定める時、任意の t に対して $F_t(x)>\epsilon$ となるような ϵ が存在すると仮定する。

$\frac{F(x)}{x} = 1-\left(\frac{1}{x}-\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right)$ である。条件を満たす ϵ が存在するとき、ある w が存在して

$$\left\lfloor\frac{1}{F_w(x)}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{1}{F_{w+1}(x)}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{1}{F_{w+2}(x)}\right\rfloor = \dots$$

が成り立つ。x は無理数で、さらに $F_t(x)$ も無理数であることが帰納的に示されるから、$1-\left(\frac{1}{x}-\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right)<1$ が成り立つ。さらに、$\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ が一定のとき、x が狭義単調減少するならば、

$1-\left(\dfrac{1}{x}-\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\right)$ も狭義単調減少する。よって、

$$1>\frac{F_{w+1}(x)}{F_w(x)}>\frac{F_{w+2}(x)}{F_{w+1}(x)}>\frac{F_{w+3}(x)}{F_{w+2}(x)}>\dots$$

が成り立ち、$\alpha=\dfrac{F_{w+1}(x)}{F_w(x)}$ とおくと、$F_{w+m}(x)<F_w(x)\alpha^m$ が得られる。$0<\alpha<1$ であるから、m を十分大きくすると $F_{w+m}(x)<\epsilon$ が成り立つ。これは ϵ の定め方に矛盾するので、仮定が偽であることが示された。

以上より、補題 I が証明された。Q.E.D.

補題 II

命題の条件の下、$(b-a)-x<\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{S_k}{k}<(b-a)+x$ が成り立つ。

補題 II の証明

$T_k=\{nx|n\in\mathbb{Z},k<nx\leq k+1,a<nx-\lfloor nx\rfloor<b\}$ と定める。nx についての条件より、明らかに $T_k=\{nx|n\in\mathbb{Z},k<nx\leq k+1,a<nx-k<b\}$ と書き換えられる。ここで、$|T_k|$ は、$\dfrac{k}{x}<n\leq\dfrac{k+1}{x}$ を満たす正整数 n の個数に等しい。ゆえに、$|T_k|=\left\lfloor\dfrac{k+1}{x}\right\rfloor-\left\lfloor\dfrac{k}{x}\right\rfloor$ である。$\dfrac{k}{x},\dfrac{k+1}{x}$ は無理数であることから、$\dfrac{k}{x}-1<\left\lfloor\dfrac{k}{x}\right\rfloor<\dfrac{k}{x},\ \dfrac{k+1}{x}-1<\left\lfloor\dfrac{k+1}{x}\right\rfloor<\dfrac{k+1}{x}$ が成り立つので、$\dfrac{1}{x}-1<|T_k|<\dfrac{1}{x}+1$ を得る。

さらに、整数 l,m が $lx<m<(l+1)x$ を満たす時、$S_l=\sum\limits_{k=0}^{m-1}T_k$ である。

命題の証明

ϵ を任意の正の実数とする。補題 I を用いると、正整数 p, 非負整数 q であって、$0<px-q<\epsilon$ なるものを定めることができる。$x'=px-q$ と定める。また、

$$S'_{k,i}=\{nx|n\in\mathbb{Z},0<n\leq k,a<(np+i)x-\lfloor(np+i)x\rfloor<b\}$$

と定める。すると、$S_{kp}=\sum\limits_{i=0}^{p-1}S'_{k,i}$ で、また

$$a<(np+i)x-\lfloor(np+i)x\rfloor<b\Leftrightarrow a<(nx'+ix)-\lfloor nx'+ix\rfloor<b$$

であるから、補題 II より $(b-a)-x'<\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{S_k}{k}<(b-a)+x'$ が成り立つので、[1]

$$(b-a)-x'<\lim_{k\to\infty}\frac{S_{kp}}{kp}<(b-a)+x'$$

[1]厳密には a,b,ix の大小関係によって場合分けをしないといけないが、省略する

も成り立つ。$x' < \epsilon$ であるから、

$$(b-a) - \epsilon < \lim_{k \to \infty} \frac{S_k}{k} < (b-a) + \epsilon$$

が成り立つ。

ここで、ϵ として任意に 0 に近い正実数をとることができるので、$\epsilon \to 0$ とすると、はさみうちの原理を用いて、$\lim_{k \to \infty} \frac{S_k}{k} = b - a$ が示される。Q.E.D.